LÓGICA MATEMÁTICA

Favián Arenas A. y Amaury Camargo

Universidad de Córdoba
Facultad de Ciencias Básicas e Ingenierías
Departamento de Matemáticas

UNIDAD DE APRENDIZAJE I

1.2. Introducción a la lógica matemática

La verdad y la mentira, palabras opuestas que utilizamos a diario para tomar decisiones, sean estas correctas o no. Debemos valorar cada cosa; pero es razonable que no todas las expresiones se pueden valorar, o...¿Alguien se atrevería a contradecir a quien pregunte por la hora?, por supuesto que no, y aunque a usted no le guste algún color ¿significa que por ello a nadie mas le gustará?.¡Claro que no! En este caso podemos decir que es una situación subjetiva o dependiente del individuo que lo exprese. También hay expresiones que para la mayoría de las personas tiene un valor único, por ejemplo .la rosa es una flor, en algunas tendremos que ser bien explícitos para evitar malos entendidos, por ejemplo: "Jesús tiene cinco letras". ¿a quien nos referimos al hombre llamado Jesús ó a la palabra Jesús?. Por lo tanto una proposición es una afirmación de la cual se puede afirmar que es cierta o que es falsa. Para expresarnos con claridad utilizamos conjuntos de palabras con sentido "lógico", sin embargo, ¿qué es en realidad lógica? Cuando escuchamos expresiones como:

"Su respuesta fue lógica"

"Es ilógico pensar que no lo notará"

"Lógicamente..."

En realidad estamos expresando lo que la mayoría de las personas haría o escogería como correcto, o dicho de otra forma, el sentido común.

¿será cierto que el sentido común es el menos común de los sentidos?

1.3. Objetivos

El alumno estará en la capacidad conocer, utilizar y aplicar los siguientes elementos básicos para la solución de un problema:

- Resolver proposiciones compuestas utilizando los conectivos lógicos.
- Hallar el valor de verdad de una proposición a través de la conjunción, disyunción, condicional, bicondicional y negación a través de proposiciones simples.
- Construir la tabla de verdad de una proposición compuesta, y decidir si es una ley.

1.4. Competencias

- Sustenta una proposición compuesta como una tautología a partir de su tabla de verdad.
- Identifica en un teorema el antecedente y el consecuente.
- Desarrolla el proceso de síntesis a partir de la construcción de proposiciones compuestas utilizando los conectivos lógicos.

1.5. Estrategias pedagógicas o actividades de aprendizaje

- Mesa redonda.
- Presentación de trabajos.
- Sesión de Chat.
- Sesión Foro.
- Talleres
- Encuentro presencial

1.6. Recursos de aprendizaje

- Aula de clases,
- Laboratorios
- Auditorios.
- Videobeam
- Retroproyector.

1.7. Proposiciones

La lógica es toda una disciplina en la que las reflexiones y el razonamiento son fundamentales. Es estudiada también por la filosofía, pero, aquí nos referiremos por lógica a la **Lógica matemática**. El elemento básico sobre el que se desarrolla toda esta teoría se llama **proposición.**

De todo lo anterior una proposición es una afirmación con sentido completo de la cual se puede afirmar que es cierta o que es falsa.

Ejemplo 1.

1. "La sal es un compuesto químico"
2. $10 < 14$
3. "13 es un número impar"
4. "El sol sale de noche"
5. $45 + 5 = 30$
6. "¿De que color es la pared?"

Las afirmaciones 1, 2, 3, 4 y 5. son proposiciones aunque no todas son verdaderas siguen siendo proposiciones.

A esta propiedad de las proposiciones de ser verdadera o falsa se le llama valor de verdad.

Las proposiciones se representan con letras minúsculas, usualmente p, q, r, s, t,..

Existen casos donde el sujeto del que se habla en la proposición no está definido o no se conoce, por lo que tiene una incógnita.

A estos casos les llamamos frases proposicionales. (Suele llamarles proposiciones abiertas)

1. $x + 12 = 20$
2. "Alguien es un ingeniero famoso"
3. Mi nombre es "fulano de tal"
4. "Tengo x dinero en el banco"

1.8. Clases de proposiciones

1. Proposiciones simples o atómicas: Son aquellas que no se pueden fragmentar en proposiciones menores.

   a)
   - "La luna es un satélite natural"
   - "Los dígitos son nueve"
   - "4 es un número par"
   - "Todos los números impares son primos"
   - "Los pingüinos son aves"

2. Proposiciones compuestas o moleculares: Las proposiciones simples se pueden conectar, y construir proposiciones llamadas compuestas. Ésta operación puede hacer que cambie su valor de verdad.

- "Las rosas son rojas y las violetas azules"es un enunciado compuesto por los subenunciados "las rosas son rojasz "las violetas son azules".
- "El es inteligente o estudia todas las noches"es, implícitamente, un enunciado compuesto por los subenunciados "El es inteligentez "estudia todas las noches".

La propiedad fundamental de un enunciado compuesto es que su valor de verdad está completamente determinado por los valores de verdad de sus subenunciados junto con la manera como están conectados para formar el enunciado compuesto. Comenzamos con un estudio de algunas de estos conectivos.

Utilizaremos las letras p, q, r(en minúsculas) para denotar proposiciones.

Además una proposición puede tomar el valor de 1 si es verdadera, 0 si es falsa, esto también se espera que ocurra en las proposiciones compuestas, por esto es necesario una tabla que de la oportunidad de verificar todas las posibles combinaciones, la llamaremos $Tablas\ de\ verdad$

1.8.1. Proposiciones conjuntivas, $p \wedge q$

Dos enunciados cualesquiera se pueden combinar con la palabra z"para formar un enunciado compuesto llamado la conjunción de los enunciados originales. Simbólicamente, $p \wedge q$ denota la conjunción de los enunciados p y q, que se lee "p y q".

el valor de esta proposición conjuntiva dependerá de que las dos proposiciones que la conforman sean verdaderas

1. p : El dos es un número par (V)

2. q : Siete es un número primo (V)

3. r : El ocho es un número primo (F)

así que :

p $\wedge$ q : El dos es un número par y siete es un número primo (V)

En caso de que una de las dos sea falsa entonces toda la proposición conjuntiva lo será.

r $\wedge$ q : El ocho es un número primo y siete es un número primo (F)

La tabla de verdad del enunciado compuesto $p \wedge q$ está dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Para ilustrarlo: en una tubería de acueducto se han colocado 2 grifos numerados p y q respectivamente si se abre p escribimos 1, si la cerramos escribimos 0. la única forma en que salga agua es $p = 1$ y $q = 1$ en cualquier otro caso no saldrá agua.

1.8.2. Proposiciones disyuntivas, $p \vee q$

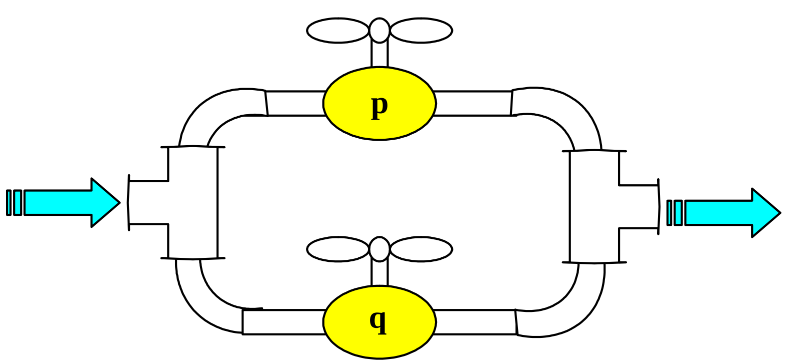
Dos enunciados se combinan con la palabra .º"para formar un enunciado compuesto llamado la disyunción de los enunciados originales. Simbólicamente, $p \vee q$ denota la disyunción de los enunciados p y q, que se lee "p o q".

El valor de esta proposición conjuntiva dependerá de que las dos proposiciones que la conforman sean no sean falsas.

La tabla de verdad del enunciado compuesto $p \vee q$ está dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En este caso la única manera en que no salga agua es que ambos grifos estén cerrados



1.8.3. Proposiciones disyuntivas exclusivas $p \veebar q$

Dos enunciados se pueden combinar con la palabra .°"para formar un enunciado compuesto llamado la disyunción de los enunciados originales. Simbólicamente, $p \veebar q$ denota la disyunción de los enunciados p y q, que se lee "p o q".

La tabla de verdad del enunciado compuesto $p \veebar q$ está dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.8.4. Proposiciones condicionales, $p \to q$

Cuando se unen dos proposiciones con el conectivo "entonces" , se forma una proposición que solo es falsa si las primera es verdadera y la segunda es falsa (solo en este orden).

Ejemplo 2.

Sea p : El canguro es marsupial (1)

q : America es habitat de todos los marsupiales (0)

El canguro es marsupial entonces América es habitat de todos los marsupiales.

en forma simbólica

p	q	$p \to q$
1	0	0

En las proposiciones condicionales llamamos a la primera proposición que la compone "antecedente" y a la segunda "consecuente". Cuando el antecedente tiene una relación directa con el consecuente podemos utilizar el símbolo de la implicación "$\Longrightarrow$"

La suma de dos números naturales es un número natural esto implica que 2+3 es número natural

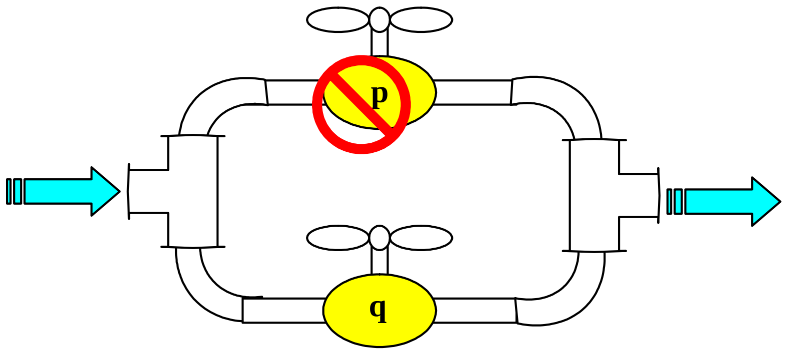
La tabla de verdad de la proposición compuesta $p \to q$ está dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ahora el grifo p tiene un problema, se encuentra mal y cuando alguien la abre esta se cierra, cuando alguien la cierra esta se abre, por eso la única forma en que no salga agua es que se abra p (en realidad se cierra) y se cierre q

1.8.5. Proposiciones bicondicionales, $p \leftrightarrow q$

Cuando se unen dos proposiciones con el conectivo "si y solo si" , se forma una proposición que solo es falsa si las dos tienen valores de verdad diferentes.



Ejemplo 3.

Sea p : todo número impar es primo (0)

q : 9 es menor que 6 (0)

Todo número impar es primo si y solo si 9 es menor que 6, es como decir: Todo número impar es primo única y exclusivamente si 9 es menor que 6

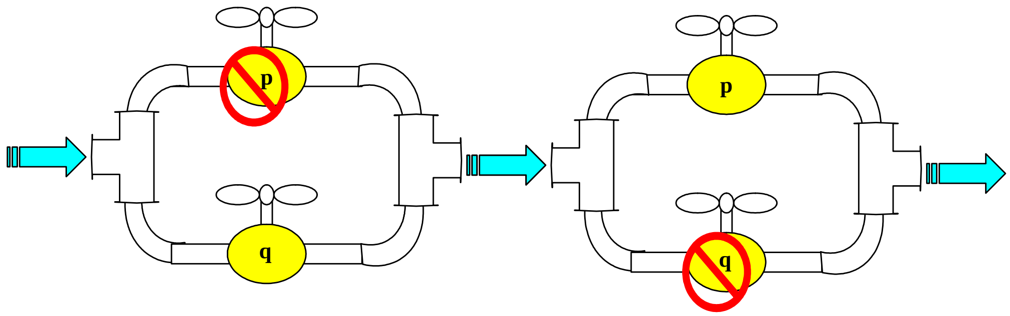
Como ambas proposiciones son falsas se cumple la afirmación compuesta

La tabla de verdad del enunciado compuesto $p \leftrightarrow q$ está dada por la siguiente tabla:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La proposición bicondicional $p \leftrightarrow q$ es equivalente por su tabla de verdad a

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$



Compruebe la tabla de verdad para este circuito de acueducto:

p	q	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

1.8.6. Proposiciones negativas:$\sim p$

Aunque no es un conectivo lógico (como $\vee, \wedge, \underline{\vee}$ $,\Longrightarrow, \Leftrightarrow$) genera nuevas proposiciones con solo cambiarle el valor de verdad y se simboliza anteponiendo "$\sim$" a la letra de la proposición:

Ejemplos:

p : todo número impar es primo

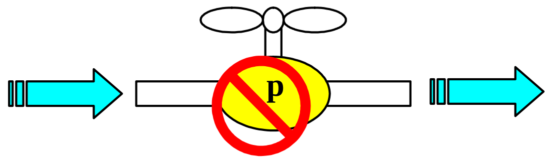
$\sim p$: no todo número impar es primo

q : 9 es menor que 6

$\sim q$: 9 no es menor que 6

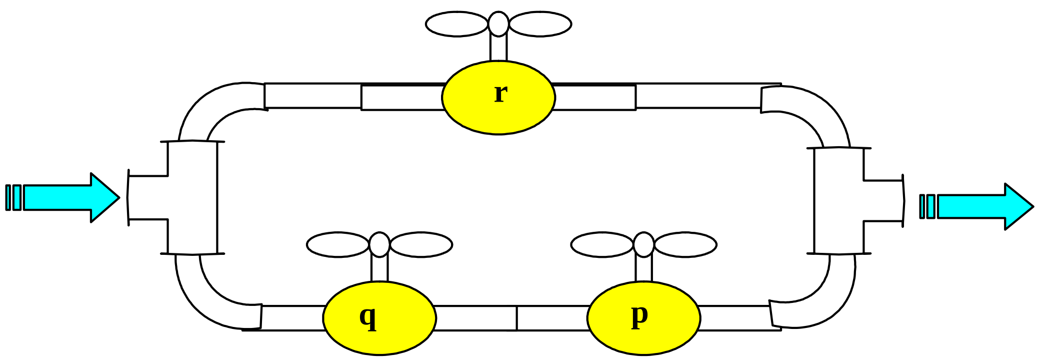
La tabla de verdad de la negación de $p : \sim p$ está dada por la siguiente tabla:

Problema 1.



p	$\sim p$
1	0
0	1

Problema 2. *Supóngase que en este circuito de acueducto llamamos abrir con el* 1 *y cerrar con el* 0*. Si sale agua* 1 *y si no sale* 0*. Completa la siguiente tabla de acuerdo a la gráfica.*



grifo p	grifo q	grifo r	¿Sale?
1	1	1	
1	1	0	
1	0	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	1	0	
0	0	1	
0	0	0	

1.8.7. Validación de leyes lógicas

A partir de las tablas de verdad anteriores se pueden calcular la tabla de verdad de proposiciones mas complejas.

Ejemplo 4. *Hallar La tabla de verdad de la proposición:* $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee \sim p)$

para esto se determinan inicialmente las tablas de:$p, q, \sim p, p \rightarrow q, q \vee \sim p$ y por último $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee \sim p)$

p	q	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$q \vee \sim p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \vee \sim p)$
1	1	0	1	1	
1	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente formula.

N^{o} de líneas $= 2^n$

Donde $n =$ número de variables distintas.

El propósito de estas tablas de verdad consiste en probar si dos proposiciones son equivalentes o no, o tal vez si una implica a la otra.

Ejemplo 5. *Veamos, se desea probar que* $(p \to q)$ *es equivalente a* $(\sim p \vee q)$ *para eso validamos la proposición* $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ *mediante su tabla de verdad*

Ejemplo 6.

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$	$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Nótese que el valor de verdad es en todo caso verdadero, cuando esto ocurre le llamamos **TAUTOLOGÍA**, cuando tenemos una tautología tenemos una ley lógica.

Veamos otro ejemplo: $(p \to q) \wedge (p \to r) \Rightarrow p \to (q \wedge r)$

p	q	r	$(p \to q)$	$(p \to r)$	$(q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

$(p \to q) \wedge (p \to r)$	$p \to (q \wedge r)$	$(p \to q) \wedge (p \to r) \Rightarrow p \to (q \wedge r)$
1	1	1
0	0	1
0	0	1
0	0	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1
1	1	1

Un ejemplo de las leyes lógicas son :

Leyes de Idempotencia

- $p \wedge p \Leftrightarrow p$
- $p \vee p \Leftrightarrow p$

Leyes conmutativas

- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
- $p \veebar q \Leftrightarrow q \veebar p$
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

Leyes asociativas

- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
- $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

Leyes distributivas

- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leyes de absorción

- $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

Leyes de Morgan

- $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

  Leyes de Involución

- $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

Problema 3. *aplica la validación de tablas para probar las anteriores leyes.*

Tambien hay ocasiones en que lo que se desea probar es que dos proposiciones no pueden ser simultáneamente verdaderas. veamos

Ejemplo 7. *pruebe que las proposiciones p es excluyente con $\sim p$*

se debe validar $(p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0

Ejemplo 8. *pruebe que las proposiciones $(p \wedge \sim q)$ es excluyente con $(p \rightarrow q)$*

se debe validar $(p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge \sim q) \wedge (p \rightarrow q)$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

A casos como estos donde la tabla termina solo con ceros se le llama **CONTRADICCIÓN**

1.9. Cuantificadores

Si, en una condición dada p(x), atribuimos a la variable x los valores de su dominio, obtendremos, como vimos, una proposición. Otra forma, extremadamente importante en Matemática, de obtener proposiciones a partir de una condición p(x), es anteponerle a esta los símbolos $\forall x, \exists x$ y $\exists! x$ que se llaman cuantificadores (cuantificador universal , cuantificador existencial y cuantificador existencial de unicidad respectivamente).

La proposición $\forall x : p(x)$ se lee "para todo x, tal que $p(x)$" y significa que $p(x)$ es verdadera, atribuyendo a x cualquier valor de su dominio.

La proposición $\exists x : p(x)$ se lee "existe un x, tal que $p(x)$" y significa que $p(x)$ es verdadera, para algún x de su dominio, ün"no significa "único". por ejemplo "María Teresa tiene una amiga que la quiere mucho"es posible que tenga más de una, es por esto que la proposición $\exists! x : p(x)$ se lee "existe un único x, tal que $p(x)$" y significa que $p(x)$ es verdadera si y solo si x toma un único valor de su dominio.

Por ejemplo, siendo x una variable real, son verdaderas las proposiciones:

1) $\forall x : x^2 + 1 > 0$

2) $\exists x : x^2 - 4 = 0$

3) $\exists ! x : 8x - 4 = 0$

Justificación:

1) Como ningún número al cuadrado es negativo

$$\begin{aligned}
\forall x &: x^2 \geq 0 \\
\forall x &: x^2 + 1 \geq 0 + 1 \\
\forall x &: x^2 + 1 \geq 1 \qquad \text{y como} \quad 1 > 0 \\
\forall x &: x^2 + 1 > 0
\end{aligned}$$

2) Mostremos los valores de x en los cuales:$x^2 - 4 = 0$;

$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

solo con lo valores -2 y 2 la proposición es verdadera

3) Se pide $8x - 4 = 0$ así que el valor de x es:

$$\begin{aligned}
8x - 4 &= 0 \\
8x &= 4 \\
x &= \tfrac{4}{8} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

y este es el único valor de x que lo hace verdadero

1.10. Actividades

Ejercicio 1. *1. ¿Cuáles de los enunciados siguientes pueden considerarse como proposiciones*

a) *Si llueve es porque estamos en invierno.*

b) *Un triángulo es una figura plana con tres lados.*

c) *Un triángulo es un polígono de tres ángulos.*

d) *La filosofía es triangular*

e) $5^2 = 21$

f) *Un cuadrado es una figura plana de cuatro lados.*

g) *Un cuadrado es un polígono de cuatro ángulos rectos*

h) *Un rectángulo es un polígono de cuatro ángulos rectos.*

i) *Medellín es ciudad de eterna primavera.*

j) *Un rectángulo es una figura verde.*

k) $x^2 + 3x - 4 = 0$

l) *Todas las naranjas son amarillas.*

m) *Algunas manzanas son rojas.*

2. Para que la proposición abierta $x + 5 < 10$ tenga valor de verdad falso, x debe reemplazarse por:

a) *2*

b) *3*

c) *4*

d) *5*

3. En la proposición: " Sí respetamos la vida entonces Colombia será un país feliz". Podemos escoger:

p : Respetamos la vida

q :Colombia será un país feliz

Se construyó la tabla de verdad para esta proposición compuesta, pero tiene un error. Localízalo, marcando con x el renglón correcto

p	q	$p \rightarrow q$
1	0	1
0	0	1
1	1	1
0	1	1

4. "Una figura de 4 lados se llama cuadrilátero, si tiene 5 lados se llama pentágono, si tiene 6 lados se llama hexágono" En el enunciado anterior identifica todas las proposiciones cerradas.

(Represéntalas con las letras p, q, r).

5. Con las proposiciones clasificadas en el ejercicio anterior. escribe en palabras las proposiciones compuestas siguientes:

a) $p \rightarrow \sim q$

b) $\sim (p \leftrightarrow q)$

c) $(p \to q\ ) \to\ (p \to r)$

6. Supón que p es verdadera, q es falsa y r es falsa ¿cómo es el valor de verdad de las siguientes proposiciones

a) $p\wedge \sim q$

b) $\sim (p \to q)$

c) $(p \vee q\ ) \veebar\ (p \to r)$

7. Completa las siguientes tablas de verdad

a)

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim p\wedge \sim q$	$p \veebar q$	$(p \veebar q) \vee (\sim p\wedge \sim q)$
1	1	1				
1	0	0				
0	1	0				
0	0	1				

b)

p	q	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$	$p\wedge \sim q$	$(p \leftrightarrow q) \to (p\wedge \sim q)$
1	1	1			
1	0	0			
0	1	0			
0	0	1			

c)

p	q	r				$((p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$
1	1	1				
1	1	0				
1	0	1				
1	0	0				
0	1	1				
0	1	0				
0	0	1				
0	0	0				

8. Construye 3 frases que no sean proposiciones, 3 proposiciones, luego niega las tres proposiciones.

9. Ana y José apostaron al marcador entre sus equipos favoritos de fútbol. Al iniciarse el partido José le dice a Ana: "si mi equipo gana entonces yo pago el almuerzo" La situación puede tener los resultados que se muestran en la tabla. ¿En cual de todos José habrá mentido? Escríbelo en la tabla.

p		q		¿José cumplió?
Ganó el equipo de José	v	José pagó el almuerzo	v	
Ganó el equipo de José	v	José no pagó el almuerzo	f	
Perdió el equipo de José	f	José pagó el almuerzo	v	
Perdió el equipo de José	f	José no pagó el almuerzo	f	

10. Encuentre una expresión que solo contenga $\wedge, \vee$ y la negación $\sim$,para representar:

a) $p \rightarrow q$

b) $p \leftrightarrow q$

c) $p \veebar q$.

11. En el siguiente circuito eléctrico cada interruptor está representado por una letra , encuentra la tabla de verdad que representa este circuito y diseña otro circuito que tenga la misma tabla de verdad.